CHAPITRE M3

Bilans d'énergie dans un écoulement stationnaire incompressible

L'étude des fluides en écoulement est motivé en filière PT par la modélisation des machines, comme les pompes ou les turbines hydrauliques. On va donc faire des bilans d'énergie pour quantifier l'énergie qui a été fournie ou récupérée par des machines.

Dans tout le chapitre, on fera deux hypothèses :

- ▷ écoulement stationnaire
- ▷ écoulement incompressible

I - Bilan d'énergie pour un système ouvert

On souhaite étudier un fluide en écoulement stationnaire incompressible et quantifier la variation de son énergie mécanique entre deux points (généralement entre l'entrée et la sortie d'une machine).

Cette variation peut être due :

- ▷ à un travail échangé avec des pièces en mouvement
- ▷ à un travail des forces visqueuses

On ne sait faire de bilans que sur des systèmes fermés ! Ici, Σ_0 est ouvert : comment faire ?

I.A - Définition d'un système fermé

Définition (Masse traversante)

Pour un écoulement stationnaire incompressible, les sytèmes $\delta\Sigma_e$ et $\delta\Sigma_s$ ont la même masse δm, qu'on appelle **masse traversante**.

Démonstration

Lien entre la masse traversante et le débit massique

Pour un écoulement stationnaire incompressible, on a

$$\delta m = D_m dt$$

Remarque
On a en fait retrouvé la conservation du débit massique pour un écoulement incompressible stationnaire !

I.B - Bilan d'énergie : cas général pour un écoulement stationnaire incompressible

Définition (Travail indiqué)

Remarque
Dans un machine sans pièce mobile, on a donc $W_i = 0$ et $\delta W_i = 0$

Bilan d'énergie pour un écoulement stationnaire incompressible

Entre l'entrée et la sortie d'un volume de contrôle au sein d'un écoulement stationnaire et incompressible, on peut écrire le bilan énergétique :

$$\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right) = w_i + w_{visc}$$

$$D_m\left[\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right)\right] = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{visc}$$

Démonstration

Remarque

Application
On considère une pompe servant à monter de l'eau d'un réservoir à une usine, située 10m plus haut. A l'entrée du tuyau, de section constante, on a une pression $P = P_{atm}$. On suppose l'écoulement stationnaire, parfait et incompressible.

Quelle doit être la puissance indiquée de la pompe pour obtenir au niveau de l'usine une pression $P = 2,5P_{atm}$ et un débit $D_V = 7$ m^3.h^{-1}.

II - Pertes de charge

Dans cette partie, l'écoulement n'est plus parfait : il y a donc des pertes via les forces visqueuses. On peut donc reprendre le bilan établi dans le cas général :

$$\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right) = w_i + w_{visc}$$

L'idée de cette partie est de voir comment on peut interpréter le terme w_{visc} et quelles peuvent être ses origines.

II.A - Pertes de charge en hauteur ou en pression

Définition (Pertes de charge en hauteur ou en pression)

Interprétation de ΔP et Δh

II.B - Pertes régulières

Définition (Pertes régulières)

On appelle **pertes régulières** les pertes dans un écoulement laminaire lorsqu'elles sont proportionnelles à la distance parcourue dans une conduite.
On parlera aussi de **pertes de charge linéiques** : pertes par unité de longueur parcourue.

Remarque
On rencontre des pertes de charge régulières si la canalisation n'a pas de modification géométrique (changement de section, coude,...)

II.C - Pertes singulières

Définition (Pertes singulières)

On appelle **pertes singulières** les pertes localisées au voisinage d'une modification géométrique brutale dans l'écoulement (changement brutal de section, coude, obstacle,...)

III - Cas particulier d'un écoulement parfait

Dans cette partie, on ajoute l'hypothèse **écoulement parfait** aux hypothèses d'écoulement stationnaire et incompressible. Dans ce cas, le bilan d'énergie vu précédemment se simplifie et prend le nom de **théorème de Bernoulli**

On va distinguer deux cas : écoulement en conduite ou à air libre.

III.A - Ecoulement en conduite

Théorème de Bernoulli en conduite

Dans un écoulement stationnaire, incompressible et parfait, la charge hydraulique prend la même valeur sur toute section de la conduite :

$$\forall \mathcal{S}, \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = cste$$

Démonstration

Remarque

Souvent dans les exercices, on admettra que cette relation reste vraie si les caractéristiques de l'écoulement varient « assez lentement ». On parle alors de régime quasi-stationnaire.

Application

On considère une conduite horizontale de section $\mathcal{S}$ constante dans laquelle l'écoulement est stationnaire, incompressible et stationnaire, de débit volumique D_v.

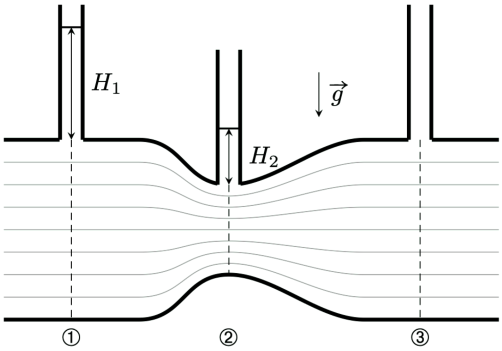
1. Comment varie la vitesse dans la conduite ?
2. Comment varie la pression dans la conduite ?

Effet Venturi

Démonstration

Application

On considère un débitmètre de Venturi. L'écoulement est supposé stationnaire, incompressible et parfait.



1. H_2 est-elle plus grand ou plus petit que H_1 ?
2. Comment déterminer D_V avec $H_1 - H_2$, si on connait S_1 et S_2 les sections aux points 1 et 2 ?

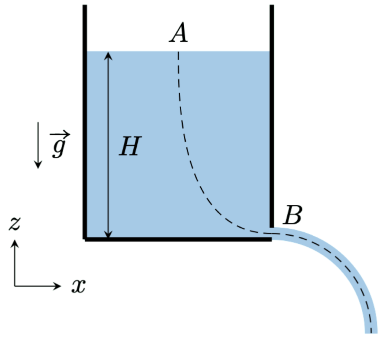
III.B - Ecoulements à l'air libre

Théorème de Bernoulli généralisé (ADMIS)

Dans un écoulement stationnaire, incompressible et parfait, la charge hydraulique prend la même valeur en tout point d'une ligne de courant $\mathcal{L}$:

$$\forall M \in \mathcal{L}, \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = cste$$

Application - Vidange de Torricelli



On considère un réservoir de section $\mathcal{S}$, rempli d'eau. Il se vide via un orifice de section $\mathcal{S}'$ tel que $\mathcal{S}' \ll \mathcal{S}$. On considère la ligne de courant AB.

Exprimer v_B en fonction de H.

Sommaire